



SELECCIONES MATEMÁTICAS

Universidad Nacional de Trujillo

ISSN: 2411-1783 (Online)

Vol. 02(01): 20 - 24 (2015)

**Aproximación de Funciones Continuas con Rango Pre-compacto.****Approximation of continuous functions Pre- Compact Range.**

Esptiben Rojas Bernilla *

Received, Feb. 15, 2015

Accepted, Jun. 15, 2015.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2015.01.02>**Resumen**

Es fundamental en teoría de aproximación, establecer condiciones para pasar de la convergencia puntual a la convergencia uniforme de funciones en ese sentido Hernández [23] estableció algunos resultados relativos al problema de aproximar uniformemente funciones continuas con rango pre-compacto. En este trabajo daremos algunos nuevos resultados al respecto, estableciendo el concepto de \mathcal{A} -separación débil a F , donde $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ y $F \in C(X, E)$.

Palabras clave. Análisis, Topología, Aproximación.

Abstract

It is essential in theory approach, establish conditions to move from the convergence point of convergence uniform duties in this regard Hernández [23] established some results relating to the problem of approximate uniformly continuous functions with pre-compact range. In this paper we will give some new results in this regard, establishing the concept of \mathcal{A} -separation weak to F , where $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ and $F \in C(X, E)$.

Keywords. Analysis, Topology, Approximation.

1. Introducción. En esta sección daremos algunas definiciones y terminología básicas que se usara en el resto del trabajo. En todo el trabajo se considerará X un espacio de Hausdorff completamente regular no vacío y E un espacio de Banach real.

Denotaremos por,

$$C(X, E) = \{f : X \rightarrow E / f \text{ es continua}\}$$

$$C^*(X, E) = \{f : X \rightarrow E / f \text{ es continua y } X \text{ es pre-compacto}\}$$

Si $x \in E$ y $A \subseteq E$ definimos la distancia de x al conjunto A por

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma en E y además

$$B_\epsilon(A) = \{x : x \in E, d(x, A) < \epsilon\}.$$

Si A es un subconjunto de un espacio topológico denotamos por \overline{A} la clausura uniforme de A en este espacio topológico.

*Facultad de Ciencias, Universidad de Magallanes, Avda. Bulnes 01855 Casilla 113 – D, Punta Arenas, Chile (esptiben.rojas@umag.cl).

This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Dotamos a $C(X, E)$ con la topología de la convergencia uniforme, así para cada $F \in C(X, E)$ y $\forall \epsilon > 0$ un entorno básico para F está definido por el conjunto de la forma

$$N_\epsilon(F) = \{G : G \in C(X, E), \|F(x) - G(x)\| < \epsilon \text{ para todo } x \in X\}$$

Si $F \in C(X, E)$, $\mathcal{G} \subseteq C(X, E)$ y $S \subseteq X$ definimos

$$d_S(F, \mathcal{G}) = \inf\{\sup\{\|F(x) - G(x)\| : x \in S\} : G \in \mathcal{G}\}$$

(nótese que $d(F, \mathcal{G})$ puede ser $+\infty$)

Escribiremos $C(X)$ por $C(X, \mathbb{R})$.

Si $S \subset X$ y F es una función sobre X escribimos $F|_S$ para la restricción de F sobre S .

Si $\mathcal{G} \subseteq C(X, E)$ entonces $\mathcal{G}|_S = \{G|_S : G \in \mathcal{G}\}$.

Definición 1. Si $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ $\mathcal{G} \subseteq C(X, E)$, y α es un número cardinal definimos

$$\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_\alpha = \left\{ \sum_{i \in I} h_i G_i / |I| < \alpha, h_i \in \mathcal{A}, G_i \in \mathcal{G} \right\}$$

Es claro que si \mathcal{G} es un módulo sobre \mathcal{A} , con respecto a la multiplicación puntual de funciones entonces $\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_\alpha \subseteq \mathcal{G}$ y si \mathcal{A} es un sub álgebra de $C(X)$ que contiene la unidad, entonces la inclusión se convierte en una igualdad.

Escribiremos $\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle$ cuando no existe restricción sobre la cardinalidad del conjunto de índices.

Definición 2. Sea $\mathcal{A} \subset C(X)$ un subconjunto no vacío S de X se llama un \mathcal{A} -conjunto antisimétrico de X si f es un elemento de \mathcal{A} y la restricción de f a S es un valor real, entonces la restricción de f a S es constante. Así para álgebras reales \mathcal{A} un conjunto antisimétrico, es igual a un conjunto donde todas las funciones del álgebra son constantes.

Se define la siguiente relación en X si $p \in X$ y $q \in X$ diremos que $p \sim q$ cuando existe un conjunto \mathcal{A} -antisimétrico S que contenga a p y q . Esta relación es de equivalencia en X , las clases de equivalencia son los conjuntos \mathcal{A} -antisimétricos maximales de X . Luego define una única descomposición de X en conjuntos disjuntos dos a dos, no vacíos.

Denotamos por $\mathcal{A}(X)$ la familia de todos los conjuntos \mathcal{A} -conjunto antisimétrico de X

$$\mathcal{A}(X) = \{S \subset X / f|_S = \text{constante } \forall f \in \mathcal{A}\}$$

Definición 3. Si \mathcal{A} es un sub álgebra de $C(X, E)$ Decimos que \mathcal{A} es Puntualmente Constante si $\mathcal{A}(X) = \{\{x\} : x \in X\}$

Definición 4. Una familia $\{h_\alpha / \alpha \in \mathbb{R}$ de funciones continuas $h_\alpha : X \rightarrow I$ es llamada una Partición de la Unidad sobre X si

1. Los soportes de h_α forma un cubrimiento cerrado finito de X
2. $\sum_\alpha h_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in X$

Sea $\{\mathbb{U}_\beta / \beta \in I\}$ es un cubrimiento abierto de X se dice que la partición $\{h_\alpha / \alpha \in I\}$ de la unidad está subordinada a $\{\mathbb{U}_\beta\}$ si el soporte de cada h_β esta contenido en algún \mathbb{U}_β .

Definición 5. Si $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, $\mathcal{G} \subseteq C(X, E)$ y α un número cardinal, diremos que \mathcal{A} α -refina \mathcal{G} cuándo para cada recubrimiento abierto \mathbb{U} de X de la forma

$$\mathbb{U} = \{G_i^{-1}(B_\epsilon\{G_i(S_i)\}) : G_i \in \mathcal{G}, S_i \in \mathcal{A}(X), i \in I\}$$

existe una partición localmente finita de la unidad $\{h_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{A}$ que está subordinado a \mathbb{U} , con $h_i \geq 0$ para todo $j \in J$ y $|J| < \alpha$.

Diremos que \mathcal{A} refina \mathcal{G} cuando no existe restricción sobre la cardinalidad de J .

Definición 6. Sea $F \in C(X, E)$ y $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, diremos que \mathcal{A} separa F cuándo para todo número r y t con $0 < r < t$ y cada $S \in \mathcal{A}(X)$, existe una función $h \in \mathcal{A}$ y una constante real p tal que $h(F^{-1}(\overline{B_r\{F(S)\}})) \geq p > 0$ y $h(X \setminus F^{-1}(B_t(\{F(S)\}))) = 0$

Observación 1. Es importante notar que si $\mathcal{A} = C(X)$, entonces toda función $F \in C(X, E)$ está \mathcal{A} -separado por \mathcal{A} .

Definición 7. Dado $F \in C^*(X, E)$, se dice que \mathcal{A} -separa debilmente a F , cuando para toda $B(a, r) \subseteq E$ y $\delta > 0$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que cumple:

1. $0 \leq f \leq 1$
2. $f|_{F^{-1}(B(a, r))} = 1$ y $f|_{X - F^{-1}(B(a, r + \delta))} = 0$

Sea $\mathcal{F} \subset C^*(X, E)$ se dice que \mathcal{A} separa débilmente a \mathcal{F} si \mathcal{A} -separa débilmente a G , para todo $G \in \mathcal{F}$

Definición 8. Sea $F \in C(X, E)$ y $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, diremos que \mathcal{A} separa F cuándo para todo número r y t con $0 < r < t$ y cada $S \in \mathcal{A}(X)$, existe una función $h \in \mathcal{A}$ y una constante real p tal que $h(F^{-1}(\overline{B_r\{F(S)\}})) \geq p > 0$ y $h(X \setminus F^{-1}(B_t(\{F(S)\}))) = 0$

Observación 2. Es importante notar que si $\mathcal{A} = C(X)$, entonces toda función $F \in C(X, E)$ está \mathcal{A} -separado por \mathcal{A} .

Definición 9. Dado $F \in C^*(X, E)$, se dice que \mathcal{A} -separa débilmente a F , cuando para toda $B(a, r) \subseteq E$ y $\delta > 0$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que cumple:

$$1. 0 \leq f \leq 1$$

$$2. f|_{F^{-1}(B(a, r))} = 1 \text{ y } f|_{X - F^{-1}(B(a, r + \delta))} = 0$$

Sea $\mathcal{F} \subset C^*(X, E)$ se dice que \mathcal{A} separa débilmente a \mathcal{F} si \mathcal{A} -separa débilmente a G , para todo $G \in \mathcal{F}$

2. Algunos resultados previos. Denotaremos por $F - \mathcal{G}$ a la familia $\{F - G/G \in \mathcal{G}\}$

Lema 1. Si $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, $\mathcal{G} \subseteq C(X, E)$ y $F \in C(X, E)$.

1. Si \mathcal{A} α -refina a $F - \mathcal{G}$, entonces $d_X(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_\alpha) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$.

2. Supongamos que $\mathcal{A}(X)$ es Puntualmente Constante y \mathcal{G} contiene todas las funciones constantes.

Si \mathcal{A} α -refina $\{F\}$ entonces $d_X(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_\alpha) = 0$

Para la prueba ver [23].

Lema 2. Si $\mathcal{A} \subseteq C^*(X)$ y $\mathcal{G} \subseteq C^*(X, E)$. Entonces $d_X(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_\mathbb{N}) = d_X(F, \langle \mathcal{G}, \overline{\mathcal{A}} \rangle_\mathbb{N})$. Para la prueba ver [23].

Lema 3. Sea \mathcal{A} es un subálgebra cerrada uniforme de $C^*(X)$ que contiene a la unidad y $F \in C^*(X, E)$. Si \mathcal{A} separa F entonces \mathcal{A} \mathbb{N} -refina $\{F\}$. Para la prueba ver [23].

Usando los Lemas anteriores, se obtiene el siguiente resultado

Teorema 1. Si $\mathcal{A} \subseteq C^*(X)$, $\mathcal{G} \subseteq C^*(X, E)$ es tal que para cada elemento de $\mathcal{A}(X)$ es Puntualmente Constante y \mathcal{G} contiene las funciones constantes. Si \mathcal{A} separa $F \in C^*(X, E)$, entonces $d_X(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle) = 0$

Para la prueba ver [23].

3. Algunos nuevos resultados. Teorema 2. Si \mathcal{A} separa a $F \in C^*(X, E)$. Además si $\mathcal{G} \subset C(X, E)$ un subálgebra que contiene a las constantes, entonces $\langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle_0$ aproxima uniformemente a F . **Prueba:**

Sea $\epsilon > 0$ y como F tiene rango pre-compacto, existe

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in X \text{ tal que } F(X) \subseteq B(F(x_1), \epsilon) \cup \dots \cup B(F(x_n), \epsilon)$$

Denotando por $B_j = B(F(x_j), \epsilon)$ y $B^j = B(F(x_j), 2\epsilon)$ y como \mathcal{A} -separa a $F \in C(X, E)$, se tiene que

$$\forall j \ 1 \leq j \leq n, \text{ existe } h_j \in \mathcal{A} \text{ tal que}$$

$$\bullet \ 0 \leq h_j \leq 1$$

$$\bullet \ h_j|_{F^{-1}(B_j)} = 1 \text{ y } h_j|_{X - F^{-1}(B^j)} = 0$$

Luego $\forall x \in X$, se cumple que $\sum_{j=1}^n h_j(x) > 0$. puesto que $x \in F^{-1}(B_j)$ para algún j .

Definiendo por recurrencia

$$g_1 = h_1$$

$$g_i = (1 - h_1)(1 - h_2) \dots (1 - h_{i-1})h_i \text{ donde } 1 < i \leq n$$

Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ se demuestra que

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1, \quad \forall x \in X$$

Tomando

$$G(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x) \widetilde{F(x_j)} \in \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle_N$$

donde $\widetilde{F(x_j)}$ es una constante.

Luego se tiene que :

$$\|F(x) - G(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^n g_j(x) F(x) - \sum_{j=1}^n g_j(x) \widetilde{F(x_j)} \right\| \leq \sum_{j=1}^n g_j(x) \|F(x) - \widetilde{F(x_j)}\|$$

observando que $x \in F^{-1}(B_j)$ entonces $\|F(x) - \widetilde{F}(x_j)\| < \epsilon$, por lo tanto

Dado $F \in C^*(X, E)$ existe $G \in \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle$ tal que $\|F - G\| \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. con lo que el teorema queda probado.

Teorema 3. Si $F \in C^*(X, E)$, $\mathcal{G} \subseteq C^*(X, E)$ y \mathcal{A} separa débilmente a $F - \mathcal{G}$ entonces

$$d_\mu(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_0) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$$

Prueba:

Sea $r = \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$

Si $r = +\infty$ no hay nada que probar.

Si $r < +\infty$ entonces, tomado $\epsilon > 0$, $\forall S \in \mathcal{A}(X)$ existe $G_S \in \mathcal{G}$ tal que

$$r \leq \|F(x) - G_S(x)\|_S < r + \epsilon$$

donde $x_j \in S_j$. Como \mathcal{A} separa a $F - \mathcal{G}$ entonces $\forall j, 1 \leq j \leq n$ existe h_j tal que

$$1. \quad 0 \leq h_j \leq 1$$

$$2. \quad h_j|_{(F-G_{S_j})^{-1}(B(F-G_{S_j})(x_j), \epsilon)} = 1 \quad \text{y} \quad h_j|_{X-(F-G_{S_j})^{-1}(B(F-G_{S_j})(x_j), 2\epsilon)} = 0$$

Luego $\sum_{1 \leq j \leq n} h_j > 0$ puesto que $x \in (F - G_{S_j})^{-1}(B(F - G_{S_j})(x_j), \epsilon)$.

Definiendo por recurrencia

$$g_1 = h_1$$

$$g_i = (1 - h_1)(1 - h_2) \dots (1 - h_{i-1})h_i \text{ donde } 1 < i \leq n$$

Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ se demuestra que

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1, \quad \forall x \in X$$

Tomando $G = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j G_{S_j}$ se demuestra como el teorema anterior, que $\|F - G\| \leq \epsilon$, con lo que termina la prueba.

Corolario 1. Sea $F \in C^*(X, E)$ de manera que \mathcal{A} separa a $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$. Si \mathcal{A} es puntualmente constante y \mathcal{G} aproxima puntualmente a F , entonces $\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_0$ aproxima uniformemente a F .

Prueba:

Por el teorema anterior

$$d_\mu(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_0) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$$

Como $S = \{x\}$ y si \mathcal{G} aproxima puntualmente a F , luego $d_{\{x\}}(F, \mathcal{G}) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, $x \in S$

Por lo tanto $d_\mu(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle) < \epsilon$.

Lo que significa que $\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_0$ aproxima uniformemente a F .

Referencias

- [1] F. Anderson. *Approximation in systems of real-valued continuous functions*. Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962) 249-271
- [2] Bartle, Robert G.: *The Elements of Real Analysis*, Segunda Edición, New York, Editorial Wiley, (1976), 90-192, 315-346.
- [3] E. Bishop: *A generalization of the Stone-Weierstrass Theorem*, Pacific J. Math. J. 11 (1961). 777-783.
- [4] R.L. Blair *Extensions of Lebesgue sets and real - valued functions*, Czechoslovak Math. J. 31 (1981). 63-74.
- [5] J. Blasco, L. Molto. *On the uniform closure of a linear space of bounded real-valued functions* Annali di Matematica Pura ed Applicata 134 (4) 1983, 233-239.
- [6] J. Blasco. *Hausdorff compactification and Lebesgue set*. Topology and its Application. 15 (1983) 111-117.
- [7] J. Blasco. *Conjuntos de Lebesgue y compactaciones de un espacio topológico*. Rev. Real Acad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. 78 (1984) 295-300.
- [8] J. Blasco. *Complete bases and Wallman realcompactification*. Proc. Amer. Soc. 75 (1979), 114-117.
- [9] B. Brosowski; F. Deutsch. *An Elementary Proof of the Stone-Weierstrass Theorem*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 81, N°1 (1981), 89-92.
- [10] R.B. Burkel: *Bishop's Stone-Weierstrass Theorem*, Amer. Math. Monthly 91 (1984). 22-32.
- [11] T. Carleman: *Sur un Théorème de Weierstrass*. 1927
- [12] Jean-Etienne Rombaldi. *Sur les theoremes de Stone-Weierstrass et de Korovkin*- 9 junio 2003.
- [13] Carothers, N.L.: *A Short Course on Approximation Theory*, Department of Mathematics and Statistics, Bowling green State University, (1998).
- [14] D.A. Edwards: *A Short proof of a Theorem of Machado*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 99 (1986), 111-114.
- [15] R. Engelking: *General Topology*, Polish Scientific, Warszawa 1977.

- [16] M.Estrada: *Los Teoremas de Ascoli y Stone-Weierstrass, su aplicación en el Análisis Funcional*.(1998) Tesis de Licenciatura.-UNPRG.
- [17] J.Galindo, M. Sanchis. *Stone-Weierstrass Type Theorems For Group-Valued Functions*.
- [18] J. Gomez. '*Algebra de Funciones Continuas Intermedias entre $C^*(X)$ y $C(X)$* 'Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.1997.
- [19] L.Gillman and M.Jerison: *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton.1960.
- [20] A.Hager. *On inverse-closed subalgebras of $C(X)$* . Proc. London. Math. Soc.III Ser.19 (1969) 233-257
- [21] A. Hager. *An approximation technique for real-valued functions*, General Topology and its Applications, 1 1971, 127-133.
- [22] M.Henriksen. *Unsolved problems on algebraic aspects of $C(X)$* .Lecture Notes in Pure and Appl.Math, 95,Dekker, New York,1985.
- [23] S. Hernández. *Approximation and extension de continuous functions*
- [24] S. Hernández. *Algebra de Funciones Continuas* Tesis Doctoral . Universidad de Valencia. 1983.
- [25] E. Hewitt: *Certain representation of the Weierstrass approximation theorem*, Duke Math., 14 (1947), 419-427.
- [26] R.Jewett. *A Variation on the Stone-Weierstrass Theorem*.Proceedings of the American Mathematical Society,Vol 14, N°5 (1963),690-693.
- [27] S.Kakutani. *Concrete representation of abstract (M)-space*,Annals of Math., 42 (1941), 994-1024.
- [28] S.Machado: *On Bishop's generalization of the Stone-Weierstrass Theorem*, Indag.Math.39 (1977).218-224.
- [29] S.Mrówka. *On some approximation Theorems*, Nieuw Archief voor Wiskunde,XVI (1968), 94-111.
- [30] F.Montalvo: *Uniform approximation theorems for real-valued continuous function*, Topology and its Application 45 (1992)145-155 North-Holland.
- [31] F.Montalvo y M.I.Garrido. *On Some Generalizations Of The Kakutani-Stone And Stone-Weierstrass Theorems*,Acta Math.Hung.(1993), 199-208.
- [32] F. Montalvo Y M.I. Garrido: *Generation of Uniformly Closed Algebras of Functions*Positivity, 8 2005, 8195.
- [33] F.Montalvo Y M.I.Garrido. *Algebraic Properties of the Uniform Closure of Space of Continuous Function* Annals of the New York . Academy of Sciences. Volumen 788,(1996)
- [34] F.Montalvo y M.I. Garrido. *Uniform approximation theorems for real-valued continuous functions*.Topology and its Application 45 (1992)145-155.North-Holland.
- [35] F.Montalvo y M.I. Garrido. *Generation of the uniformly continuous functions*.Topology and its Application, 137 2004, 167174.
- [36] M.I.Garrido: *Aproximación Uniforme en Espacios de Funciones Continuas*, Departamento de Matemáticas -Universidad de Extremadura (1990)
- [37] A.Pinkus. *Weierstrass and Approximation Theory*
- [38] A.Pinkus. *Density in Approximation Theory*-4 julio-2004.
- [39] A.Pinkus. *Density Methods And Results in Approximation Theory*.Orlicz Centenary Volume. Banach Center Publication, Volume 64.(2004)
- [40] J.Prolla: *Weierstrass-Stone the theorem*,Velag Peter Lang GmbH ,Frankfurt am Main 1993
- [41] T.J. Ransford. *One Short elementary proof of the Stone-Weierstrass - Bishop Theorem* , Math, Proc. Cambridge Philos.Soc. 96(1984), 309-311.
- [42] E.Rojas. *Aproximación en Espacios de Funciones Continuas*, Trabajo de Investigación -DEA, Universidad Jaime I,Castellón (2006).
- [43] W. Rudin. *An'alisis Funcional* Editorial Reverté, S.A.-1979.
- [44] Y. Sterfeld. *Dense Subgroups of $C(K)$ Stone-Weierstrass Type Theorems for Groups*Constructive Approximation. 6:339-351 (1990).Springer- Verlag New York Inc.
- [45] Y. Sternfeld, Y. Weit. *An Approximation theorem for vector-valued function*. In: *Geometric Aspects Functional Analysis*Lecture Notes in Mathematics. Belin: Springer-Verlag - 1998.
- [46] M.H.Stone, *A generalized Weierstrass approximation theorem*Math. Magazine,21 (1948),167-184, 237-254.
- [47] K.Weierstrass. *Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle*.J.Math.Pure et Appl. 2 (1886) 115-138.